Cours
ENSEMBLES DE NOMBRES

I LES ENSEMBLES DE NOMBRES

1 – NOMBRES ENTIERS NATURELS

DÉFINITION

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;\ldots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.
On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

EXEMPLES

$$245 \in \mathbb{N}; \qquad -5 \notin \mathbb{N}; \qquad 2^5 \in \mathbb{N}; \qquad \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}; \qquad 0 \in \mathbb{N}; \qquad 0 \notin \mathbb{N}^*$$

La notation « $x \in E$ » signifie que l'élément x *appartient* à l'ensemble E.
La notation « $x \notin E$ » signifie que l'élément x *n'appartient pas* à l'ensemble E.

NOTIONS D'ARITHMÉTIQUE

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

— on dit que b *divise* a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$. (on dit encore que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b)

— Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

2 – NOMBRES ENTIERS RELATIFS

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.
En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *contenu* (ou inclus) dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

La proposition « Si $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ » est vraie.
Par contre, la réciproque « Si $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ alors $n \in \mathbb{N}$ » est fausse. (Il suffit de choisir $n = -1$)

3 – NOMBRES DÉCIMAUX

L'ensemble des *nombres décimaux* est $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k} \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\right\}$. Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.

EXEMPLES

$$-13 \in \mathbb{D}; \qquad 0{,}3333 \in \mathbb{D}; \qquad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}; \qquad \frac{3}{4} \in \mathbb{D}; \qquad 3{,}1416 \in \mathbb{D}; \qquad \pi \notin \mathbb{D}.$$

4 – NOMBRES RATIONNELS

L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

— La fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 ou -1).

— La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.

— La division par 0 est **interdite** : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens.

EXEMPLES

$-13 \in \mathbb{Q}$; $0{,}5 \in \mathbb{Q}$; $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$.

5 – NOMBRES RÉELS

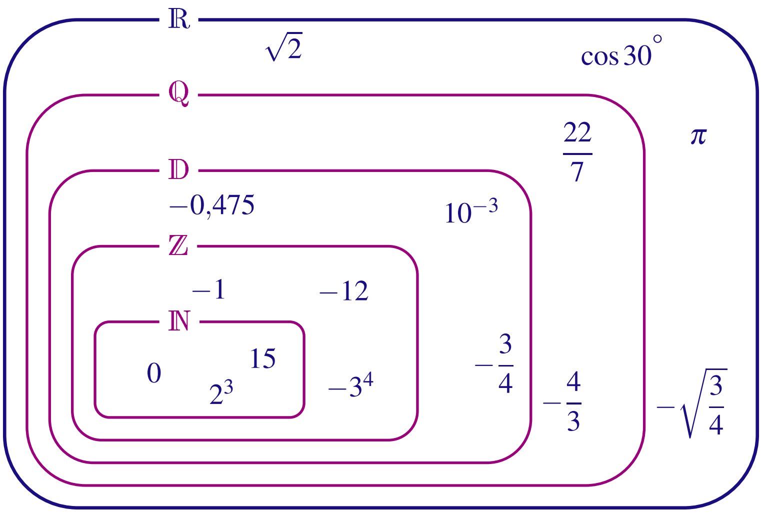
Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels.
Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

L'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$

Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé *abscisse* de ce point.

INCLUSIONS

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II INTERVALLES ET INÉQUATIONS

1 – INTERVALLES

Soient $a < b$ deux nombres réels :

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a;b[$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a;b[$

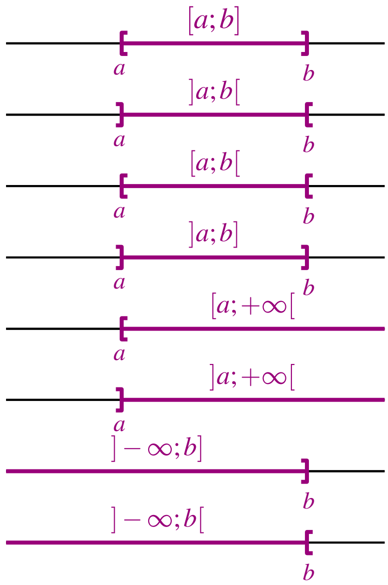
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $]a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est l'intervalle $[a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l'intervalle $]a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant b$ est l'intervalle $]-\infty;b]$

L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l'intervalle $]-\infty;b[$



EXEMPLES

Écrire sous forme d'intervalle les ensembles de nombres réels suivants :

1. $x \leqslant \frac{3}{4}$.

   L'ensemble cherché est constitué de tous les nombres réels x inférieurs ou égaux à $\frac{3}{4}$. Il s'agit de l'intervalle $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$.

2. $-3 < x \leqslant \sqrt{2}$.

   L'ensemble cherché est constitué de tous les nombres réels x strictement supérieurs à -3 et inférieurs ou égaux à $\sqrt{2}$. Il s'agit de l'intervalle $\left]-3;\sqrt{2}\right]$.

2 – INTERSECTION ET RÉUNION D'INTERVALLES

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

— **L'intersection** des intervalles I et J, notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I **et** à l'intervalle J :

$$\text{Si } x \in I \text{ et } x \in J, \text{ alors } x \in I \cap J \qquad (\cap \text{ se lit } \textit{inter})$$

— **La réunion** des intervalles I et J, notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I **ou** à l'intervalle J :

$$\text{Si } x \in I \text{ ou } x \in J, \text{ alors } x \in I \cup J \qquad (\cup \text{ se lit } \textit{union})$$

EXEMPLES

1. Soient les intervalles $I =]-\infty;3]$ et $J =]-3;5]$.

   a) L'intersection des deux intervalles $I \cap J$ est l'ensemble des réels x tels que : $x \leqslant 3$ et $-3 < x \leqslant 5$ soit $I \cap J =]-3;3]$.

   b) La réunion des deux intervalles $I \cup J$ est l'ensemble des réels x tels que : $x \leqslant 3$ ou $-3 < x \leqslant 5$ soit $I \cup J =]-\infty;5]$.

2. L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.